ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986

УДК 514.75

О НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ КОНГРУЭНЦИИ ПАРАБОЛ

Л.А.Жарикова

В статье продолжается изучение конгруэнции π парабол, начатое в работе [1], в трехмерном аффинном пространстве. Показано, что с конгруэнцией π ассоциируется главное расслоение $G(\pi)$, дана геометрическая характеристика оснащения, позволяющего ввести связность в $G(\pi)$. Выделен подкласс $\tilde{\pi}$ конгруэнции π и найдены его геометрические свойства.

§1. О связности в расслоении, ассоциированном с конгруэнцией π

Отнесем конгруэнцию π к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, где A – точка пересечения с параболой ее диаметра $\mathcal{D}_1$, проходящего через характеристическую точку M плоскости P образующего элемента конгруэнции π, вектор $\bar{e}_1$ расположен в плоскости параболы, вектор $\bar{e}_2$ направлен по диаметру $\mathcal{D}_1$, $\bar{e}_3$ – вне плоскости параболы. Относительно репера R уравнение параболы и система дифференциальных уравнений Пфаффа конгруэнции π запишутся в виде (1) и (2):

$$a_{11}(x^1)^2-a_1x^1-x^2=0, \quad x^3=0; \tag{1}$$

$$\begin{cases} da_{11}-a_{11}(2\omega_1^1-\omega_2^2)=a_{11}^1\omega_1+a_{11}^2\omega_2, \\ da_1-a_1(\omega_1^1-\omega_2^2)-\omega_1^2=a_1^1\omega_1+a_1^2\omega_2, \\ \omega^1=M^{11}\omega_1+M^{12}\omega_2,\ \omega^2=M^{21}\omega_1+M^{22}\omega_2, \\ \omega^3=\Lambda^2\omega_2,\ \omega_2^1=N^{11}\omega_1+N^{12}\omega_2,\ \text{где } \omega_i^3=\omega_i. \end{cases} \tag{2}$$

Как показано в работе [1], с конгруэнцией π в n-мерном аффинном пространстве, а значит и в A_3, ассоциируется главное расслоение $G_6(\pi)$, базой которого является конгруэнция π, а типовым слоем шестичленная подгруппа стационарности фигуры $\Phi=\{A,\mathcal{D}_1,P\}$. В расслоении $G_6(\pi)$ зададим связность по Г.Ф.Лаптеву:

$$\tilde{\omega}_1^1=\omega_1^1-T^i\omega_i,\quad \tilde{\omega}_1^2=\omega_1^2-R^i\omega_i,\quad \tilde{\omega}_2^2=\omega_2^2-L^i\omega_i$$

$$\tilde{\omega}_3^1=\omega_3^1-B^i\omega_i,\quad \tilde{\omega}_3^2=\omega_3^2-S^i\omega_i,\quad \tilde{\omega}_3^3=\omega_3^3-\Gamma^i\omega_i,$$

где компоненты объекта связности $\Gamma=\{T^i,L^i,B^i,R^i,S^i,\Gamma^i\}$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla T^i-T^i\omega_3^3-N^{1i}\omega_1^2+\delta_1^i\omega_3^1\equiv 0,$$
$$\nabla L^i-L^i\omega_3^3+N^{1i}\omega_1^2+\delta_2^i\omega_3^2\equiv 0,$$
$$\nabla B^i-2B^i\omega_3^3-T^i\omega_3^1+\Gamma^i\omega_3^1-N^{1i}\omega_3^2\equiv 0,$$
$$\nabla R^i-R^i(\omega_3^3-\omega_2^2)+(T^i-L^i)\omega_1^2+\delta_1^i\omega_3^2\equiv 0,$$
$$\nabla S^i-S^i(2\omega_3^3-\omega_2^2)-(L^i-\Gamma^i)\omega_3^2+B^i\omega_1^2-R^i\omega_3^1\equiv 0,$$
$$\nabla\Gamma^i-\Gamma^i\omega_3^3-\omega_i^3\equiv 0.$$

Обозначим через K_1 прямую, не принадлежащую плоскости P параболы и проходящую через точку A; через K_2 – плоскость, проходящую через прямую K_1 и имеющую с диаметром $\mathcal{D}_1$ параболы лишь одну общую точку A. Прямую K_1 зададим вектором $\bar{e}=\bar{e}_3+\lambda^i\bar{e}_i$, плоскость K_2 – векторами $\bar{e}$ и $\bar{E}$, где $\bar{E}=\bar{e}_1+\mu\bar{e}_2$. Присоединение к каждой фигуре Φ прямой K_1 и плоскости K_2 позволяет задать связность в ассоциированном расслоении, которая возникает внутренним образом. Действительно, объекты λ^i,μ можно выразить через компоненты объекта, определяющего конгруэнцию π:

$$\lambda^1=a_1N^{11}+N^{12};\quad \lambda^2=-(2(a_1)^2N^{11}+a_1N^{12}+a_1^1),\ \mu=-a_1.$$

§2. Конгруэнции $\tilde{\pi}$

Используя оснащение фигуры Φ, перейдем от репера R к реперу $\tilde{R}$: пусть направление вектора $\bar{e}_1$ совпадает с направлением вектора $\bar{E}$,а вектор $\bar{e}_3$ является направляющим вектором прямой K_1. Тогда $a_1 = 0$, $a_1^1 = 0$, $N^{12} = 0$. Расомотрим подкласс $\widetilde{\pi}$ конгруэнции π ,характеризующийся тем,что точка A является характеристической точкой плоскости P параболы и **асимптотические линии** поверхности (A) - координатные. При этом $\Lambda^2 = 0, M^{12} = M^{21}$, $M^{11} = M^{22} = 0$, $N^{122} + a_1^2 N^{11} + a_1^{11} = 0$ и уравнение образующего элемента конгруэнции $\widetilde{\pi}$ и система дифференциальных уравнений принимают вид (3) и (4) соответственно:

$$a_{11}(x^1)^2 - x^2 = 0, \quad x^3 = 0, \tag{3}$$

$$\begin{cases} da_{11} - a_{11}(2\omega_1^1 - \omega_2^2) = a_{11}^1\omega_1 + a_{11}^2\omega_2, \ \omega_1^2 = -a_1^2\omega_2, \\ \omega_2^1 = N^{11}\omega_1, \ \omega_3^1 = N^{121}\omega_1 - a_1^{11}\omega_1, \ \omega_3^2 = -a_1^{11}\omega_1 - a_1^{12}\omega_2, \\ \omega^1 = M^{12}\omega_2, \ \omega^2 = M^{12}\omega_1, \ \omega^3 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Для конгруэнции $\widetilde{\pi}$ справедливы следующие утверждения:

1) Точка A является двукратной фокальной **точкой конгруэнции** $\widetilde{\pi}$ **,сдвоенным фокусом конгруэнций диаметров и касательных параболы в точке** A.

2) Вектор $\bar{e}_1$ - направляющий вектор касательной к параболе в точке A, $\bar{e}_3$-вектор аффинной нормали поверхности (A).

3)Характеристическая точка M_1 плоскости $\{A, \bar{e}_1, \bar{e}_3\}$ находится на диаметре параболы,характеристическая точка M_2 плоскости $\{A, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$-на касательной к параболе в точке A.

4) Не существует расслоения от конгруэнции $\widetilde{\pi}$ парабол к конгруэнции аффинных нормалей поверхности (A).

5) Связность Γ является эквиаффинной.

6)Тензор кривизны связности Γ равен нулю тогда и только тогда,когда конгруэнция аффинных нормалей поверхности образует связку прямых в сдвоенном фокусе и существует хотя бы одно из расслоений от конгруэнции касательных к параболе к конгруэнции плоскостей $\{A, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ или от конгруэнции диаметров параболы к конгруэнции плоскостей $\{A, \bar{e}_1, \bar{e}_3\}$.

7) Квадрика Ли поверхности (A) представляет собой однополостный гиперболоид,причем касательная к параболе в точке A и диаметр параболы,проходящий через точку A ,являются ее прямолинейными образующими.

Если тензор кривизны связности Γ равен нулю,то сдвоенный фокус конгруэнции аффинных нормалей поверхности (A) совпадает с центром квадрики Ли поверхности (A).

8) Присоединим к каждой точке $\bar{N} = A + \rho\bar{e}_3$ аффинной нормали плоскость,параллельную плоскости параболы. Получим многообразие Q ,которое назовем присоединенным [2].

Присоединенное многообразие Q голономно. При этом двойные точки [2] аффинной нормали совпадают с фокальными точками конгруэнции аффинных нормалей.

Библиографический список

1.Л.А.Ж а р и к о в а. Об оснащении многообразия фигур,индуцированного конгруэнцией нецентральных квадратичных элементов в A_n // Тез.докл. VI Прибалт. геометр. конф. - Таллин: Изд-во Тартуского ун-та,1984.С.43.

2.П е т и н В.А. К эквиаффинной теории двупараметрического многообразия плоских элементов // Геометрич.сб.: Межвузовский темат.сб.науч.тр./Томский ун-т.-Томск, 1972.Вып.8.С.63-73.